第12讲:圆锥曲线解答题之定值问题

1. (2009·辽宁)已知,椭圆 C 过点 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$,两个焦点为 $(-1,0)$,$(1,0)$.

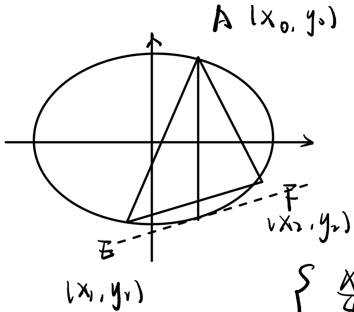
(1)求椭圆 C 的方程; $c=1$ $a^2=4$ $b^2=3$.

(2)E,F 是椭圆 C 上的两个动点,如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数,证明直线 EF 的 $\boxed{\text{斜率为定值}}$,并求出这个定值.

$C:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1.$

(2)

$(1,\frac{3}{2})$ $A(x_0,y_0)$



切线: $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

$\boxed{\text{设}AE}$ $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$

AF: $y-\frac{3}{2}=-k(x-1)$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ kx-y+\frac{3}{2}-k=0\end{cases}$$

$1\cdot x_1=\dfrac{4k^2-12k-3}{4k^2+3}$

同理 $x_2=\dfrac{4k^2+12k-3}{4k^2+3}$

$\boxed{\text{韦达定理 求另一点}}$

$k_{EF}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\frac{3}{2}-kx_2+k-(kx_1-k+\frac{3}{2})}{x_2-x_1}$

$=\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{设}EF}$ $k_{AE}+k_{AF}=0$

$\boxed{\text{齐次化}}$ A点平移至原点

2. (2022新高考Ⅰ)已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上,直线 l 交 C 于 P,Q 两点,直线 AP,AQ 的斜率之和为0.

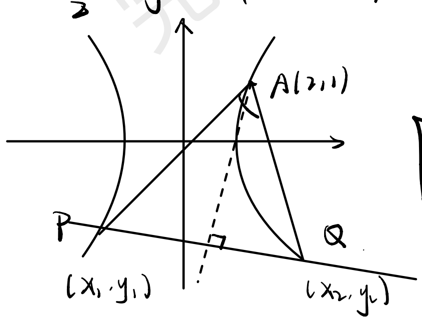
(1)求 l 的斜率;

(2)若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,求 PAQ 的面积. $\boxed{\text{倒角公式}}$

(1)

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1\ \Rightarrow a^2=2.$

$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$



法一 设 PA: $y-1=k(x-2)$

QA: $y-1=-k(x-2)$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-y^2=1.\\ kx-y+1-2k=0.\end{cases}$$

$2\cdot x_1=\dfrac{2(4k^2-4k+1+1)}{2k^2-1}\Rightarrow x_1=\dfrac{4k^2-4k+2}{2k^2-1}$

同理 $x_2=\dfrac{4k^2+4k+2}{2k^2-1}$

$y_1=\dfrac{-4k+4}{2k^2-1}k+1=\dfrac{-2k^2-4k+1}{2k^2+1}$

$y_2=\dfrac{-2k^2-4k+1}{2k^2+1}$

$k_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

(2) $\tan\angle PAQ=\dfrac{-k-k}{1-k^2}=\dfrac{2k}{k^2-1}=2\sqrt{2}$

$k=\sqrt{2}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

设 $k=\sqrt{2}$

$PA=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-2|$

$QA=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-2|$

$\sin\angle PAQ=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$S=\frac{1}{2}PA\cdot QA\cdot\sin\angle PAQ$

$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{2}{3}\sqrt{2}\ |x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$

$=\frac{16}{9}\sqrt{2}$

3. (2023·新高考Ⅱ)已知双曲线C中心为坐标原点，左焦点为$(-2\sqrt{5},0)$，离心率为$\sqrt{5}$.

(1) 求C的方程；

(2) 记C的左、右顶点分别为A_1，A_2，过点$(-4,0)$的直线与C的左支交于M，N两点，M在第二象限，直线MA_1与NA_2交于P，证明P在定直线上.

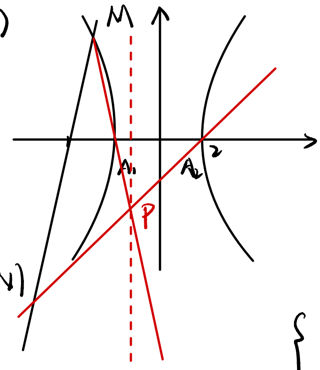
(1) $\frac{c}{a}=\sqrt{5}$

$c=2\sqrt{5}$

$a=2$.

$C:\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

(2)



$M(x_1,y_1)$
$N(x_2,y_2)$

极点极线

$(-4,0)$作极点

$\frac{-4x}{4}-\frac{0\cdot y}{16}=1$

$x=-1$

在定直线上

反设MN

$y_1\cdot y_2=\frac{-16\times 12}{4-16t^2}$

$y_1+y_2=\frac{-128t}{4-16t^2}$

直线MA_1：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$

直线NA_2：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$

非对称韦达定理

$\frac{x+2}{x-2}=\frac{\frac{y_2}{x_2-2}}{\frac{y_1}{x_1+2}}=\frac{y_2(ty_1-2)}{y_1(ty_2-6)}=\frac{ty_1y_2-2y_2}{ty_1y_2-6y_1}=\frac{ty_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_1}{ty_1y_2-6y_1}$

$=-\frac{1}{3}$

$x=-1$

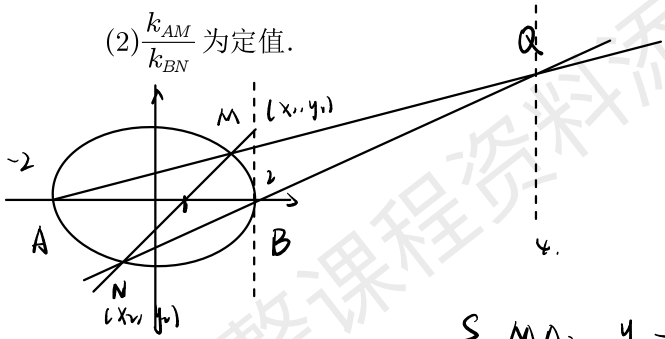
4. 在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右顶点为$A$，$B$，直线$l$过点$P(1,0)$与椭圆交于$M$，$N$，直线$AM$，$BN$交于点$Q$，

求证：

(1) Q在一定直线上.

(2) $\frac{k_{AM}}{k_{BN}}$为定值.

反设MN



(1) $\frac{x}{4}=1$

$x=4$.

MA：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$

BN：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$

$\frac{x+2}{x-2}=\frac{ty_1y_2+3y_2}{ty_1y_2-y_1}$

$x=4$

若MN水平，Q在y轴上.

若MN不水平

(2) $\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}$

第三定义.

$\boxed{法二}$ $\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{y_1^2}{x_1^2-4}=\frac{2-\frac{1}{2}x_1^2}{x_1^2-4}=-\frac{1}{2}$

$\frac{x+2}{x-2}=\boxed{\frac{\frac{y_2}{x_2-2}}{\frac{y_1}{x_1+2}}}=\frac{-2y_1y_2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+4}=3$

$x=4$.

5．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$O$ 是坐标原点，F_1,F_2 分别为其左右焦点，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，M 是椭圆上一点，$\angle F_1MF_2$ 的最大值为 $\frac{2}{3}\pi$

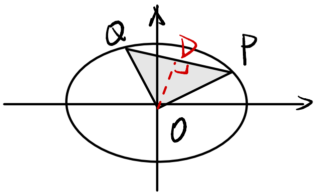
$c=\sqrt{3}$　$a=2$.　$b=1$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)若直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点，且 $OP\perp OQ$

(i)求证：$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$ 为定值；

(ii)求 ΔOPQ 面积的取值范围.



结论 $\boxed{OD\text{为定值}}$

$PQ\cdot OD=OP\cdot OQ$

$PQ^2\cdot OD^2=OP^2\cdot OQ^2$

$(OP^2+OQ^2)\cdot OD^2=OP^2\cdot OQ^2$

$OD^2=\frac{OP^2\cdot OQ^2}{OP^2+OQ^2}=\frac{1}{\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}}=\boxed{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$

(i) 若 OP、OQ 一个水平，一个竖直.

$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

若 — —

设 $OP: y=kx$. 则 $OQ: y=-\frac{1}{k}x$.

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow b^2x^2+a^2k^2x^2=a^2b^2$

$x_P^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$

$y_P^2=k^2x_P^2=\frac{a^2b^2k^2}{a^2k^2+b^2}$

$OP^2=\frac{a^2b^2(k^2+1)}{a^2k^2+b^2}$　则 $OQ^2=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2+b^2k^2}$

$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

(ii) 由(i)知 $OP^2=\frac{4(k^2+1)}{4k^2+1}$

$S=\frac{1}{2}OP\cdot OQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{4k^2+1}}\cdot\frac{2\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+4}}=\frac{2(k^2+1)}{\sqrt{(4k^2+1)(k^2+4)}}$

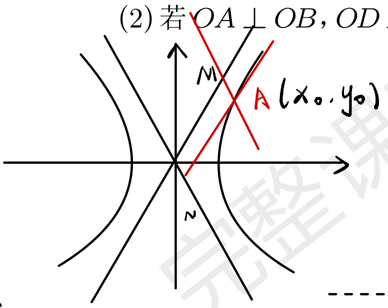
$=\sqrt{\frac{4k^4+8k^2+4}{4k^4+17k^2+4}}=\sqrt{1-\frac{9k^2}{4k^4+17k^2+4}}$　$(k\neq0)$

$=\sqrt{1-\frac{9}{4k^2+17+\frac{4}{k^2}}}\in[\frac{4}{5},1]$

6．已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，点 A,B 在双曲线右支上，O 为坐标原点.

(1)若过点 A 作双曲线的两条渐近线的平行线，分别交两条渐近线于点 M,N，证明：平行四边形 $OMAN$ 的面积为定值；

(2)若 $OA\perp OB$，$OD\perp AB$，D 为垂足，求点 D 的轨迹的长度.



$\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ y-y_0=-\sqrt{3}(x-x_0)\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3}x=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}x_0+y_0$

$x_M=\frac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2\sqrt{3}}$

$y_M=\frac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2}$

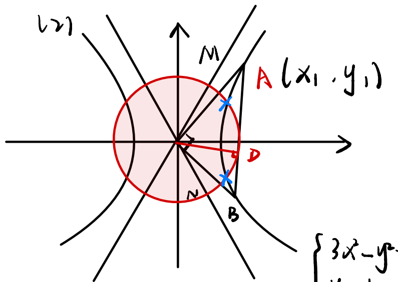
$|OM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_M-0|=\frac{|\sqrt{3}x_0+y_0|}{\sqrt{3}}$

$\begin{cases}y=-\sqrt{3}x\\ y-y_0=\sqrt{3}(x-x_0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_N=\frac{\sqrt{3}x_0-y_0}{2\sqrt{3}}\\ y_N=\frac{-\sqrt{3}x_0+y_0}{2}\end{cases}$

$|ON|=\sqrt{1+k^2}\,|x_N-0|=\frac{|\sqrt{3}x_0-y_0|}{\sqrt{3}}$

$S=|OM||ON|\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{|3x_0^2-y_0^2|}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)



$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=$ 定

$OA: y=kx$.

$OB: y=-\frac{1}{k}x$.

$\begin{cases}3x^2-y^2=3\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow 3x^2-k^2x^2=3$.

$x^2(3-k^2)=3$.

$\begin{cases}x_1^2=\frac{3}{3-k^2}\\ y_1^2=\frac{3k^2}{3-k^2}\end{cases}\Rightarrow OA^2=\frac{3k^2+3}{3-k^2}$

同理 $OB^2=\frac{3+3k^2}{3k^2-1}$

$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{2}{3}$

$OA\cdot OB=AB\cdot OD\to OA^2\cdot OB^2=(OA^2+OB^2)\cdot OD^2$

$\Rightarrow OD^2=\frac{OA^2\cdot OB^2}{OA^2+OB^2}=\frac{3}{2}$　　$D: x^2+y^2=\frac{3}{2}$

取円与双曲线相交范围

7. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的对称轴上的定点 $M(m,0)$ $(m>0)$，作直线 AB 与抛物线相交于 A,B 两点.

(1) 试证明 A,B 两点的纵坐标之积为定值；

$k_1 \quad k \quad k_2$

(2) 若点 N 是定直线 l:$x=-m$ 上任意一点，求证：三条直线 AN,MN,BN 的斜率成等差数列.

(1) $x=ty+m.$

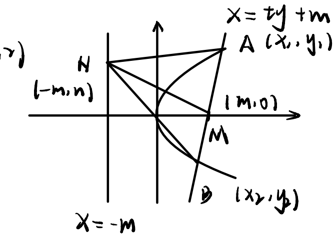
$y^2=2px=2p(ty+m)$

$y^2-2pty-2pm=0.$

$y_1\cdot y_2=-2pm$

$x_1\cdot x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=m^2$

(2)



$k_1+k_2=2k$

$k_1=\dfrac{y_1-n}{x_1+m}$ $\quad k_2=\dfrac{y_2-n}{x_2+m}$

$k=\dfrac{-n}{2m}$

$y^2=2px=2p(ty+m)$

$k_1+k_2=\dfrac{y_1x_2+y_1m-nx_2-2mn+x_1y_2-x_1n+my_2}{x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2}$

$=\dfrac{x_1y_2+y_1x_2+m(y_1+y_2)-n(x_1+x_2)-2mn}{x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2}$

$x_1+x_2=2pt^2+2m$

$x_1y_2+x_2y_1=-2ptm$

8. (2013·江西) 如图，椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，直线 l 的方程为 $x=4$.

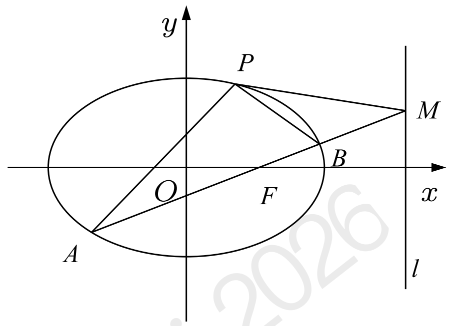
(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M，记 PA，PB，PM 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3. 问：是否存在常数 λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$？若存在，求 λ 的值；若不存在，说明理由.

9. 已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，它的一个顶点恰好是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点，离心率等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过椭圆 C 的右焦点 F 作直线 l 交椭圆 C 于 A、B 两点，交 y 轴于 M 点，若 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求证：$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值.



10. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，点 $P(4,\sqrt{3})$ 在 C 上.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 设过点 $(1,0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，问在 x 轴上是否存在定点 Q，使得 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$ 为常数？若存在，求出 Q 点坐标及此常数的值，若不存在，说明理由.

课堂总结

作业

1. 如图，抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点，点 $P(1,2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 均在抛物线上.

(Ⅰ)写出该抛物线的方程及其准线方程；

(Ⅱ)当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，求 y_1+y_2 的值及直线 AB 的斜率.